

# MÉDIATION À VARIABLE D'EXPOSITION ORDINALE APPLICATION À L'ÉTUDE DU CUMUL DE DISCRIMINATIONS SUR L'ESTIME DE SOI

Galharret J.-M.

<sup>1</sup> *Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Nantes-U, France*  
*jean-michel.galharret@univ-nantes.fr*

**Résumé.** En sciences humaines, l'analyse de médiation consiste à étudier si l'effet d'une variable d'exposition  $X$  sur une variable réponse  $Y$  peut être décomposé en un effet direct et un effet indirect via une troisième variable  $M$  (appelée médiateur). Une approche classique pour obtenir ces effets est d'utiliser des modèles d'équations structurelles dont les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance. Nous proposons une adaptation de cette modélisation lorsque la variable d'exposition est ordinaire en définissant la matrice de design du modèle par la méthode des contrastes. Nous proposons également pour ce modèle une alternative bayésienne basée sur les  $g$ -priors. Cette méthodologie est appliquée à une étude en psychologie sociale sur le lien entre le cumul des discriminations et l'estime de soi. Les deux approches sont comparées sur cette étude et les résultats sont similaires.

**Mots-clés.** Médiation,  $g$ -prior, équation structurelle.

**Abstract.** In the human sciences, mediation analysis consists of studying whether the effect of an exposure variable  $X$  on a response variable  $Y$  can be decomposed into a direct effect and an indirect effect via a third variable  $M$  (called mediator). A classical approach to obtain these effects is to use structural equation models whose parameters are estimated by maximum likelihood. We propose an adaptation of this modeling when the exposure variable is ordinal by defining the design matrix of the model by the method of contrasts. We also propose for this model a Bayesian alternative based on  $g$ -priors. This methodology is applied to a study in social psychology on the link between the accumulation of discriminations and self-esteem. The two approaches are compared on this study and the results are similar.

**Keywords.** Mediation,  $g$ -prior, structural equation modeling (SEM).

## 1 Introduction

Ndobo et al. (2022) étudient les conséquences du cumul de discriminations sur l'estime de soi. Dans cette étude, les psychologues considèrent qu'il y a trois sources de discrimination possible : l'âge (sénior vs jeune), le statut professionnel (chômeur vs employé) et enfin le genre (femme vs homme). Le but de cette étude consiste à prouver que plus on cumule des discriminations,

- plus on en aura une perception importante, ce qui induira une moins bonne estime de soi,
- plus on s’identifiera à son groupe, ce qui permettra une meilleure estime de soi,
- plus on s’engagera affectivement et professionnellement, ce qui permettra une meilleure estime de soi .

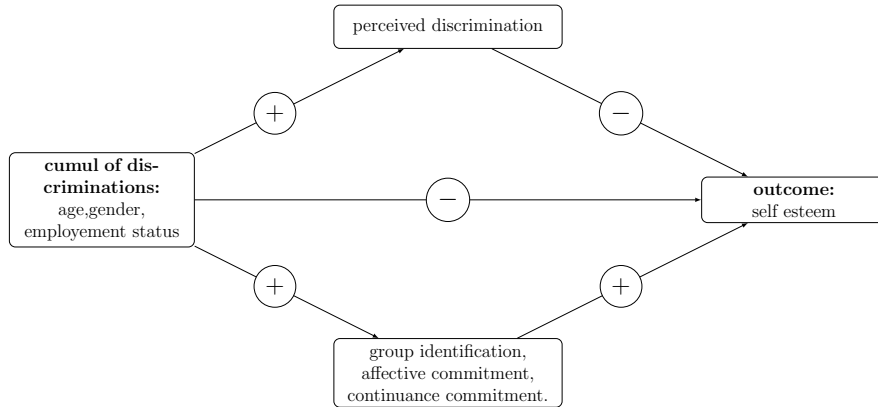


Figure 1: La discrimination perçue est un médiateur par lequel l’association entre le cumul des discriminations et l’estime de soi est négative, l’identification au groupe, l’engagement affectif et l’engagement de continuité sont des médiateurs par lesquels cette association est positive.

Les variables qui interviennent dans l’étude résumée dans la Figure 1 sont mesurées à l’aide de questionnaires : la perception de la discrimination (Perceived discrimination) est mesurée par quatre items issus de Redman and Snape (2006), l’estime de soi au travail (Self-esteem) quatre items extraits de Petersen (1965) l’engagement affectif au travail (AC : affective commitment) trois items de Allen and Meyer (1990), l’engagement professionnel (PC : professional commitment) 3 items extraits de Allen and Meyer (1990) et enfin l’identification à son groupe 3 items de Garstka et al. (2004).

On propose un modèle de médiation pour une variable d’exposition catégorielle et des médiateurs continus multiples. On construit, puis on compare, des estimateurs fréquentistes et bayésiens des paramètres de ce modèle . On montre que l’utilisation d’une matrice de contrastes permet de modéliser dans les équations de médiation le cumul des discriminations et ainsi d’évaluer son effet sur l’estime de soi.

## 2 Modélisation statistique

La modélisation utilisée requiert de définir la notion de contraste, les  $g$ -priors pour un modèle de régression, la médiation à variable d’exposition catégorielle et enfin utiliser toutes ces notions pour construire le modèle.

## 2.1 Contrastes dans un modèle linéaire

Soit  $X$  catégorielle à  $K$  modalités et  $Y$  continue. Soit  $\mathbb{X} := [\mathbb{1}_{X=1}, \dots, \mathbb{1}_{X=K}]$  la matrice disjonctive associée à la variable  $X$ . On considère l'équation de régression  $Y$  de paramètres  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_K)$  définie par

$$Y = \mathbb{X}\mu + \varepsilon, \quad (1)$$

où  $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$ .

L'estimateur par maximum de vraisemblance est  $\hat{\mu} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_K)$  où  $\bar{Y}_k$  est la moyenne empirique de  $Y$  sur la catégorie  $k$ . En pratique, il est fréquent que l'on ne soit pas intéressé par les coefficients  $(\mu_1, \dots, \mu_K)$  en soi mais plutôt par leur différence, ou bien toute autre combinaison linéaire de ceux-ci.

**Définition 1** Une matrice  $C \in \mathbb{R}^{K \times (K-1)}$  de rang  $(K-1)$  dont toutes les colonnes sont orthogonales au vecteur  $\mathbb{1}_K = {}^t(1, \dots, 1)$  est appelée matrice de contrastes.

**Application :** Soit  $\mathbb{X}_C = \mathbb{X}[\mathbb{1}_K, C] = [\mathbb{1}_n, \mathbb{X}C]$  la matrice associée à la matrice de contrastes  $C$ . On pose  $\theta := C^{-1}\mu \in \mathbb{R}^{K-1}$ . Le modèle  $Y = \mathbb{X}_C\theta + \varepsilon$  est alors équivalent au modèle (1).

De plus on a l'équivalence

$$\mu_1 = \dots = \mu_K \iff \theta_1 = \dots = \theta_{K-1} = 0.$$

Ainsi tester l'existence de l'effet de  $X$  sur  $Y$  revient à tester la nullité de  $(K-1)$  contrastes associés au paramètre  $\mu$ .

## 2.2 $g$ -prior pour un modèle gaussien de régression

Zellner (1971) a introduit une classe de lois a priori appelées  $g$ -priors pour les modèles de régression multiple. Le  $g$ -prior du paramètre  $\mu$  défini dans l'équation (1) est

$$\mu | \sigma^2 \sim \mathcal{N}_K(0, g\sigma^2({}^t\mathbb{X}\mathbb{X})^{-1}),$$

où  $g \in \mathbb{R}^+$  est un hyperparamètre. Le choix classique  $g = n$  donne à la loi a priori le même poids qu'une observation.

**Proposition 1** Le  $g$ -prior est une loi a priori invariante par re-paramétrisation par contrastes.

## 2.3 Modèle de médiation à variable d'exposition catégorielle : Effet direct et indirect

On considère un modèle de médiation  $(X, M, Y)$  avec  $X$  catégorielle à  $K$  modalités et  $M, Y$  continues. On considère la matrice disjonctive  $\mathbb{X} = [\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_{X=2}, \dots, \mathbb{1}_{X=K}]$ , où  $\mathbb{1}_n = {}^t(1, \dots, 1)$

est le vecteur colonne de taille  $n$ . Le modèle de médiation  $(X, M, Y)$  s'écrit sous la forme du système d'équations linéaires :

$$[\mathcal{M}] : \begin{cases} M = \mathbb{X}\theta + \varepsilon_M, \\ Y = \mathbb{X}\alpha + \beta M + \varepsilon_Y, \end{cases}$$

où  $\theta = {}^t(\theta_1, \dots, \theta_K)$ ,  $\alpha = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathbb{R}^K$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_M \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma_M^2 I_n)$  et  $\varepsilon_Y \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma_Y^2 I_n)$ .

**Définition 2 (Hayes et Preacher, 2014)** *les paramètres  $\alpha_2, \dots, \alpha_K$  définissent les effets directs relatifs de  $X$  sur  $Y$  et  $\theta_2\beta, \dots, \theta_K\beta$  les effets relatifs indirects de  $X$  sur  $Y$ . Les effets totaux relatifs de  $X$  sur  $Y$  sont les paramètres  $\psi_2, \dots, \psi_K$  définis par le modèle*

$$Y = \mathbb{X}\psi + \varepsilon'_Y, \quad \varepsilon'_Y \sim \mathcal{N}_n(0, (\sigma'_Y)^2 I_n).$$

On montre facilement que l'effet total s'écrit comme la somme de l'effet direct et de l'effet indirect :

$$\psi_k = \alpha_k + \beta\theta_k.$$

L'estimation de ces effets se déduisent des estimateurs des moindres carrés ordinaires. Tester l'existence d'un effet direct de  $X$  sur  $Y$  revient à tester la nullité d'un coefficient de régression. Pour tester l'existence de l'effet indirect, la méthode classique est d'approcher la loi de l'estimateur du produit  $\beta\theta_k$  par bootstrap (voir MacKinnon et al., 2002, pour plus de détail).

**Alternative bayésienne :** Galharret and Philippe (2022) montrent que l'on peut adapter les  $g$ -priors aux modèles de médiation gaussienne. Dans ce contexte, on obtient facilement des intervalles de crédibilité pour les effets directs et indirects.

## 2.4 Modélisation avec une variable d'exposition ordinale

Dans l'étude réalisée, nous voulons analyser l'effet du cumul des discriminations c'est à dire que nous voulons réaliser les comparaisons entre les individus possédant  $k$  discriminations contre ceux en possédant  $k - 1$ . Pour cette variable d'exposition ordinale nous voulons donc comparer les effets lorsque l'on passe de la modalité  $k - 1$  à la modalité  $k$ . Pour ce faire on re-paramétrise le modèle de médiation  $[\mathcal{M}]$ . Pour prendre en compte le cumul, nous proposons la matrice de contrastes  $C$  qui conduit au design suivant

$$\mathbb{X}_C = [\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_{X=2} - \mathbf{1}_{X=1} \dots, \mathbf{1}_{X=K} - \mathbf{1}_{X=K-1}]. \quad (2)$$

Cette approche par contrastes permet de tester l'existence des effets relatifs directs et indirects du cumul de  $X$  sur  $Y$  en testant

$$\alpha_k = 0, \quad \beta\theta_k = 0 \quad k = 1, \dots, K - 1.$$

dans le modèle

$$[\mathcal{M}] : \begin{cases} M = \mathbb{X}_C \theta + \varepsilon_M, \\ Y = \mathbb{X}_C \alpha + \beta M + \varepsilon_Y, \end{cases}$$

où  $\varepsilon_M \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma_M^2 I_n)$  et  $\varepsilon_Y \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma_Y^2 I_n)$ .

Nous montrons que la proposition 1 d'invariance des  $g$ -priors se généralise au modèle de médiation  $[\mathcal{M}]$ .

### 3 Résultats et conclusion :

Pour modéliser les relations envisagées dans la figure 1 nous proposons d'estimer les effets directs et indirects du cumul des discriminations ( $X$ ) sur l'estime de soi ( $Y$ ) via les quatre médiateurs, perception de la discrimination ( $M_1$ ), identification à son groupe ( $M_2$ ), engagement affectif au travail ( $M_3$ ) et engagement professionnel ( $M_4$ ) à partir du système de cinq équations de régression :

$$\begin{cases} M_j = \mathbb{X} \theta^{(j)} + \varepsilon_j, \\ Y = \mathbb{X} \alpha + \sum_{j=1}^4 \beta^{(j)} M_j + \varepsilon, \end{cases}$$

où  $\mathbb{X}$  est définie dans (2),  $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma_j^2 I_n)$ ,  $j \in \{1, \dots, 4\}$ , et  $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$ .

L'étude a porté sur  $N = 422$  participants contactés par email, par des forums et des associations d'aide à la réinsertion de sénior dans le monde professionnel. Le recueil de données a eu lieu durant le premier semestre de l'année 2017. La figure 2 et la table 1 résument les résultats obtenus avec le modèle de médiation.

Les hypothèses de l'existence d'effets indirects qui avaient été émises par les psychologues sont partiellement validées sauf pour l'identification au groupe ( $M_2$ ) où aucun effet indirect n'a été mis en évidence. Ainsi le cumul des discriminations impacte l'estime de soi à travers la perception de la discrimination et l'engagement au travail.

La table 1 fournit les estimations des effets indirects obtenus en utilisant l'approche classique par bootstrap et l'approche bayésienne en utilisant les  $g$ -priors. Les estimations obtenues sur les observations de l'étude sont proches.

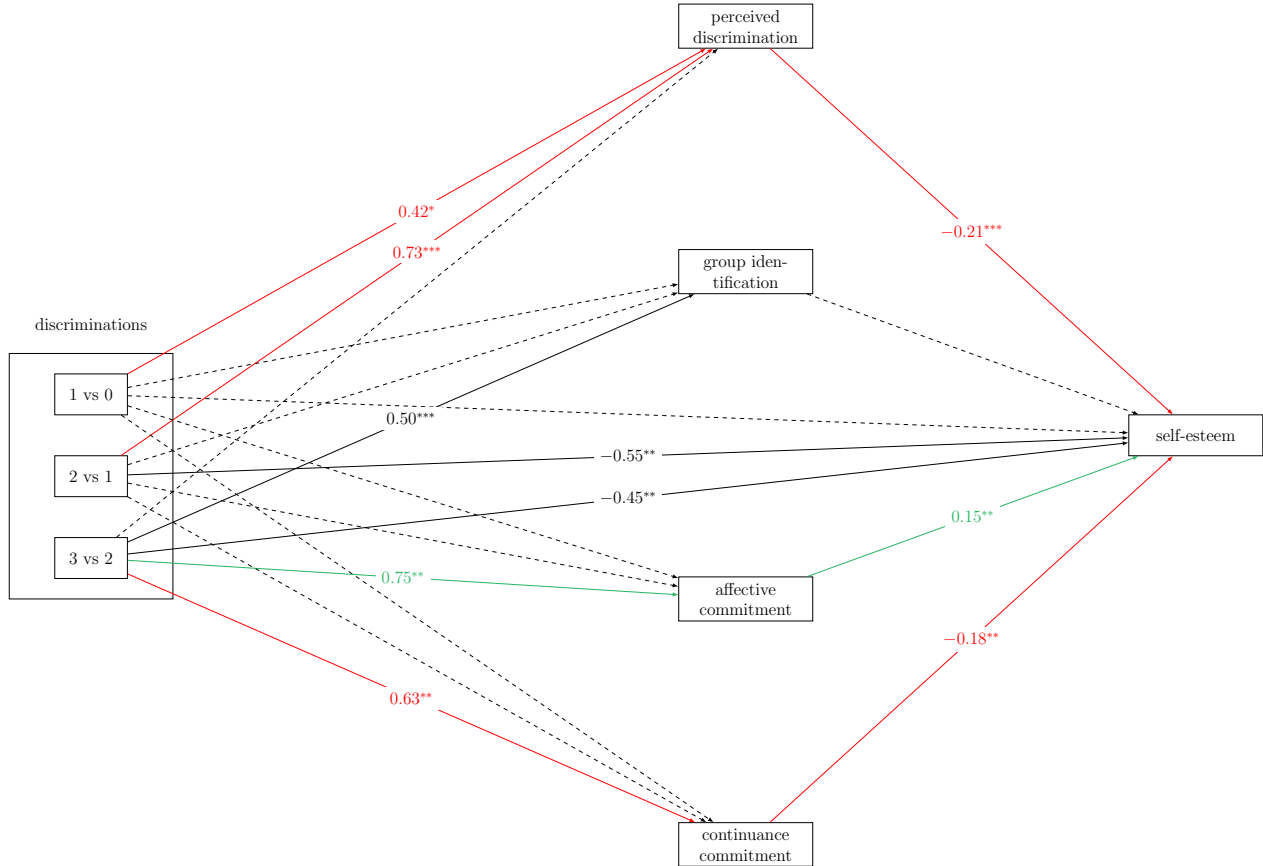


Figure 2: Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance. Les lignes en pointillés correspondent aux liens non significatifs. Les effets relatifs indirects négatifs sont en rouges et les positifs en vert. \* désigne  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$

Indirect	estB	CI <sub>l</sub> B	CI <sub>u</sub> B	estG	CI <sub>l</sub> G	CI <sub>u</sub> G
1 vs 0 via Perceived discrimination	-0.09	-0.22	-0.01	-0.14	-0.25	-0.04
2 vs 1 via Perceived discrimination	-0.15	-0.27	-0.07	-0.22	-0.36	-0.11
3 vs 2 via Perceived discrimination	0.01	-0.07	0.08	-0.13	-0.23	-0.06
1 vs 0 via Affective commitment	-0.02	-0.13	0.06	0.02	-0.07	0.10
2 vs 1 via Affective commitment	-0.03	-0.11	0.03	0.04	-0.02	0.12
3 vs 2 via Affective commitment	0.11	0.03	0.25	0.07	0.01	0.15
1 vs 0 via Continuance commitment	-0.03	-0.15	0.05	-0.08	-0.18	-0.00
2 vs 1 via Continuance commitment	0.00	-0.07	0.07	-0.09	-0.20	-0.02
3 vs 2 via Continuance commitment	-0.11	-0.24	-0.03	-0.09	-0.17	-0.02
1 vs 0 via Group identification	-0.01	-0.07	0.01	0.00	-0.03	0.04
2 vs 1 via Group identification	-0.02	-0.07	0.01	-0.01	-0.04	0.02
3 vs 2 via Group identification	0.03	-0.02	0.12	0.00	-0.02	0.03

Table 1: Les effets indirects du cumul des discriminations sur l'estime de soi. CI<sub>l</sub>B et CI<sub>u</sub>B désignent les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance bootstrap Bca. CI<sub>l</sub>G et CI<sub>u</sub>G désignent les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de crédibilité.

## Bibliographie

- Allen, N. J. and Meyer, J. P. (1990). The measurement and antecedents of affective, continuance and normative commitment to the organization. *Journal of Occupational Psychology*, 63:1–18.
- Galharret, J.-M. and Philippe, A. (2022). Bayesian analysis for mediation and moderation using  $g$ -priors. *Econometrics and Statistics*, <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.12.009>.
- Garstka, T. A., Schmitt, M. T., Branscombe, N. R., and Hummert, M. L. (2004). How Young and Older Adults Differ in Their Responses to Perceived Age Discrimination. *Psychology and Aging*, 19:326–335.
- Hayes, A. F. and Preacher, K. J. (2014). Statistical mediation analysis with a multicategorical independent variable. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 67(3):451–470.
- MacKinnon, D. P., Lockwood, C. M., Hoffman, J. M., West, S. G., and Sheets, V. (2002). A comparison of methods to test mediation and other intervening variable effects. *Psychological Methods*, 7.
- Ndobo, A., Faure, A., Galharret, J.-M., Sarda, E., and Debont, L. (2022). The coping strategies of individuals in multiple jeopardy settings: the case of unemployed older women. *The Journal of Social Psychology*, 0(0):1–26. PMID: 36416218.
- Petersen, W. (1965). Society and the Adolescent Self-Image. Morris Rosenberg. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965. xii + 326 pp. *Science*, 148.
- Redman, T. and Snape, E. (2006). The consequences of perceived age discrimination amongst older police officers: Is social support a buffer? *British Journal of Management*, 17(2):167–175.
- Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley.